1) Решить симплекс-методом задачу линейного программирования

$$10x_1 - 7x_2 - 5x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 9 \\ 14x_1 + 42x_2 + 16x_3 \le 21 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3) \end{cases}$$

Симплекс-метод решения задачи.

Симплексный метод применяется при решении задач линейного программирования, заданных в канонической форме.

Задачу линейного программирования будем считать приведённой к каноническому виду, если:
- система ограничений содержит только равенства;
- правые части системы ограничений неотрицательны.

Приведём задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 + x_4 = 9 \\ 14x_1 + 42x_2 + 16x_3 + x_5 = 21 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_6 = 4 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

$$L(X) = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min$$

► Сведём данные в 1-й блок таблицы Гаусса (в столбце $c^Б$ стоят коэффициенты базисных переменных целевой функции):

базис	$c^Б$	10	-7	-5	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
x_4	0	6	15	6	1	0	0	9	9:16=0,6	
x_5	0	14	**42**	16	0	1	0	21	21:42=**0,5**	$\times\left(-\frac{5}{14}\right)_1 \left(-\frac{4}{21}\right)_3$
x_6	0	2	8	2	0	0	1	4	4:8=0,5	
		-10	**7**	5	0	0	0	0		таблица №0

Первоначально базисными переменными являются переменные x_4, x_5, x_6, и начальное опорное решение:

$$x^{(0)} = (0;\ 0;\ 0;\ 9;\ 21;\ 4)$$

$$L^{(0)} = 10 \cdot 0 - 7 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 21 + 0 \cdot 4 = 0$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} - 10 = -10 \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 42 \\ 8 \end{pmatrix} - (-7) = 7 \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} - (-5) = 5$$

Заметим, что запись вида $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ отражает скалярное произведение векторов, т.е. например

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32.$$

Здесь возможны три случая (в случае задачи на **минимум**):

- все оценки в индексной строке неположительны - значит полученный план оптимален;
- среди оценок есть хотя бы одна положительная, и в столбце над ней есть хотя бы один положительный коэффициент - план неоптимален, возможно его улучшение;
- среди оценок есть хотя бы одна положительная, и в столбце над ней нет ни одного положительного коэффициента - целевая функция не ограничена сверху, оптимального плана не существует.

► Поскольку в строке индексов есть положительные оценки, то опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану, т.е. изменим базис.

Ведущий столбец α в случае задачи на минимум определяется по наибольшей оценке в строке индексов и указывает, какая переменная будет вводиться в новый базис. В данном случае ведущий столбец $\alpha = 2$ и в новый базис вводится переменная x_2.

Ведущая строка β определится по наименьшей величине θ_i и указывает, какая базисная переменная выводится из базиса. В данном случае ведущая строка $\beta = 2$ $(21:42 = 0,5)$ и из базиса выводится переменная x_5. При выборе между строками с одинаковыми отношениями θ_i выбрали в качестве ведущей строку с меньшим номером.

Замечания.

- Если $a_{i\alpha} \le 0$, то θ_i не вычисляется.
- При вычислении θ_i может получиться так, что минимум отношения окажется одинаковым для нескольких номеров i, т.е. сразу несколько строк таблицы могут быть разрешающими. Если выбирать ведущую строку произвольно, то это может привести к зацикливанию алгоритма симплекс-метода (вырожденный случай). Чтобы избежать этого, рекомендуется этот выбор осуществлять по определённому правилу, например:

правило **а**) в качестве разрешающей следует всегда выбирать строку с наименьшим номером в системе ограничений [5, стр. 78].

правило **б**) для строк таблицы с одинаковым минимумом отношений θ_i вычисляются отношения $a_{i1}/a_{i\alpha}$, и находится строка, для которой это отношение является минимальным. Если такая строка единственная, то её считают разрешающей. В противном случае вычисляются следующие отношения $a_{i2}/a_{i\alpha}$ и т.д. В результате получим единственную разрешающую строку [1, стр. 21].

Итак, определены ведущий столбец $\alpha = 2$, а ведущая строка $\beta = 2$.

Переходим к новому базису и составляем для него симплекс-таблицу. Переход от одного блока таблицы к другому осуществляем посредством элементарных преобразований Гаусса для строк.

Как происходит пересчёт строк таблицы при переходе от таблицы 0 к таблице 1.

После того, как определили разрешающий элемент, будем добиваться, чтобы столбец с этим разрешающим элементом стал единичным, т.е. все элементы в нём станут нулевыми, а сам разрешающий элемент стал равным 1. Я делаю это так.

Чтобы вместо 15 в 1-й строке получился 0 при сложении её со 2-й строкой, перед сложением этих строк 2-ю строку умножим на $\frac{1}{42}\cdot(-15) = -\frac{15}{42} = -\frac{5}{14}$.

Чтобы вместо 8 в 3-й строке получился 0 при сложении её со 2-й строкой, перед сложением этих строк 2-ю строку умножим на $\frac{1}{42}\cdot(-8) = -\frac{8}{42} = -\frac{4}{21}$.

Определённые таким образом коэффициенты фиксируем в колонке "комментарии".

Проведя сложения всех строк со 2-й строкой, получаем нули в разрешающем столбце. Но сам разрешающий элемент пока не изменился. Поделим 2-ю строку на 42, и он станет равен 1. Вот и получена таблица 1.

базис	$c^Б$	10	-7	-5	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
x_4	0	1	0	2/7	1	-5/14	0	3/2	(3/2):(2/7)=5,3	
x_2	-7	1/3	**1**	8/21	0	1/42	0	1/2	(1/2):(8/21)=**1,3**	$\times\left(-\frac{3}{4}\right)_1 \left(\frac{11}{4}\right)_3$
x_6	0	-2/3	0	-22/21	0	-4/21	1	0		
		-37/3	**0**	7/3	0	-1/6	0	-7/2		таблица №1

В результате преобразований на месте ведущего столбца новой симплекс-таблицы получен единичный столбец.

Построим новый опорный план:

$$x^{(1)} = \left(0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{3}{2};\ 0;\ 0\right)$$

$$L^{(1)} = 10\cdot 0 - 7\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot 0 + 0\cdot\frac{3}{2} + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = -\frac{7}{2}$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} - 10 = -\frac{37}{3} \qquad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2/7 \\ 8/21 \\ -22/21 \end{pmatrix} - (-5) = \frac{7}{3}$$

$$\Delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -5/14 \\ 1/42 \\ -4/21 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{6}$$

► В строке индексов положительная оценка, следовательно, опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану.

базис	$c^Б$	10	-7	-5	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
x_4	0	3/4	-3/4	0	1	-3/8	0	9/8		
x_3	-5	7/8	21/8	1	0	1/16	0	21/16		
x_6	0	1/4	11/4	0	0	-1/8	1	11/8		
		-115/8	-49/8	0	0	-5/16	0	-105/16		таблица №2

Опорный план:

$$x^{(2)} = \left(0;\ 0;\ \frac{21}{16};\ \frac{9}{8};\ 0;\ \frac{11}{8}\right)$$

$$L^{(2)} = 10\cdot 0 - 7\cdot 0 - 5\cdot\frac{21}{16} + 0\cdot\frac{9}{8} + 0\cdot 0 + 0\cdot\frac{11}{8} = -\frac{105}{16} = -6\frac{9}{16}$$

Индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3/4 \\ 7/8 \\ 1/4 \end{pmatrix} - 10 = -\frac{115}{8} \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -3/4 \\ 21/8 \\ 11/4 \end{pmatrix} - (-7) = -\frac{49}{8}$$

$$\Delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -3/8 \\ 1/16 \\ -1/8 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{5}{16}$$

Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является оптимальным, т.к. оценки в строке индексов все неположительны.

Найдено решение, оптимальное с точки зрения достижения минимума целевой функции при заданных ограничениях:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = 1\frac{5}{16},$$

при этом

$$L\left(0;\, 0;\, \frac{21}{16}\right) = -6\frac{9}{16}$$ (минимально возможное значение целевой функции).

► Решение задачи в Mathematica 6:

```
Minimize[10 x1 - 7 x2 - 5 x3, {6 x1 + 15 x2 + 6 x3 ≤ 9, 14 x1 + 42 x2 + 16 x3 ≤ 21, 2 x1 + 8 x2 + 2 x3 ≤ 4,
  x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0}, {x1, x2, x3}]
```

$$\left\{-\frac{105}{16}, \left\{x_1 \to 0, x_2 \to 0, x_3 \to \frac{21}{16}\right\}\right\}$$

► Решение задачи в Mathcad 14 с помощью функции `Minimize`:

$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$

$L(x_1, x_2, x_3) := 10 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3$

Given

$6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 9$

$14x_1 + 42x_2 + 16x_3 \le 21$

$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 4$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$

$y := \mathrm{Minimize}(L, x_1, x_2, x_3)$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\frac{5}{16} \end{pmatrix} \qquad L(y_0, y_1, y_2) = -6\frac{9}{16}$$

► Решение задачи в Mathcad 14 с выводом всех промежуточных таблиц; преобразование Жордана-Гаусса выполняется подпрограммой `JG(M,a,b)`:

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$$JG(M,a,b) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\mathrm{rows}(M) \\ \quad \text{for } j \in 1..\mathrm{cols}(M) \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} N_{i,j} \leftarrow \dfrac{M_{i,j}}{M_{a,b}} \quad \text{if } i = a \\ N_{i,j} \leftarrow M_{i,j} - \dfrac{M_{i,b} \cdot M_{a,j}}{M_{a,b}} \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ N \end{array} \right.$$

функция, выполняющая преобразование Жордана-Гаусса относительно указанного элемента (a,b) матрицы M.
(a - номер строки, считая с 1;
b - номер столбца, считая с 1)

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 14 & 42 & 16 & 0 & 1 & 0 & 21 \\ 2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -10 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A := JG(A,2,2) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & 1 & -\frac{5}{14} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{8}{21} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{22}{21} & 0 & -\frac{4}{21} & 1 & 0 \\ -\frac{37}{3} & 0 & \frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \qquad A := JG(A,2,3) \to \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{9}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{21}{8} & 1 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{21}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{11}{8} \\ -\frac{115}{8} & -\frac{49}{8} & 0 & 0 & -\frac{5}{16} & 0 & -\frac{105}{16} \end{pmatrix}$$

► Решение задачи в MuPAD Pro 4 с использованием встроенной функции `minimize`:

```
[{6*x1+15*x2+6*x3<=9, 14*x1+42*x2+16*x3<=21, 2*x1+8*x2+2*x3<=4,
 x1>=0, x2>=0, x3>=0},
 10*x1-7*x2-5*x3, {x1, x2, x3}]:
 linopt::minimize(%)
```

$$\left[\mathrm{OPTIMAL}, \left\{x1 = 0, x2 = 0, x3 = \frac{21}{16}\right\}, -\frac{105}{16}\right]$$

► Решение задачи в MuPAD Pro 4 с выводом всех промежуточных таблиц; преобразование Жордана-Гаусса выполняется встроенной функцией `userstep`.

```
export(linopt, Transparent):
[[6*x[1]+15*x[2]+6*x[3]<=9, 14*x[1]+42*x[2]+16*x[3]<=21,
 2*x[1]+8*x[2]+2*x[3]<=4], -10*x[1]+7*x[2]+5*x[3], NonNegative]:
 Transparent(%);                          //таблица 0
 Transparent::userstep(%, slk[2], x[2]);  //таблица 1
 Transparent::userstep(%, x[2], x[3]);    //таблица 2
```

"linopt"	"restr"	slk_1	slk_2	slk_3	x_2	x_1	x_3
"obj"	0	0	0	0	7	−10	5
slk_1	9	1	0	0	15	6	6
slk_2	21	0	1	0	42	14	16
slk_3	4	0	0	1	8	2	2

"linopt"	"restr"	slk_1	slk_2	slk_3	x_2	x_1	x_3
"obj"	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	$-\frac{37}{3}$	$\frac{7}{3}$
slk_1	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{5}{14}$	0	0	1	$\frac{2}{7}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{42}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{21}$
slk_3	0	0	$-\frac{4}{21}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{22}{21}$

"linopt"	"restr"	slk_1	slk_2	slk_3	x_2	x_1	x_3
"obj"	$-\frac{105}{16}$	0	$-\frac{5}{16}$	0	$-\frac{49}{8}$	$-\frac{115}{8}$	0
slk_1	$\frac{9}{8}$	1	$-\frac{3}{8}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
x_3	$\frac{21}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{21}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
slk_3	$\frac{11}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

В userstep идёт ссылка на таблицу, затем указывается переменная, которая выводится из базиса, и переменная, которая войдёт в базис. Таблица 2 содержит оптимальное решение, т.к. в строке obj все элементы неположительны. Величина -105/16 есть значение целевой функции в оптимальном решении.

Из базиса выводится переменная с наибольшей величиной obj. Вводится в базис переменная с наименьшим отношением θ. Разрешающие элементы в таблицах 0 и 1 выделены красным цветом, а также стоимости плана выделены синим цветом вручную.

Литература:

1) Тюлюкин В.А. “Исследование операций”, методичка УрГЭУ (Екатеринбург), 2002;

2) Лунгу К.Н. "Линейное программирование; руководство к решению задач", 2005, стр. 28 (пример 3.1 - графический метод), стр. 56 (пример 4.6 - симплекс-метод), стр. 66 (двойственность);

3) Истомин Л.А., Степин В.П. "Математическое программирование", методичка УрГЭУ, 2003, стр. 10...18 (решение типовой задачи линейного программирования);

4) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Mathcad 12", 2005, стр. 223 (задача 8.3);

5) Плотников А.Д. "Математическое программирование", 2006;

6) Ермаков В.И. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2007, стр. 571.